

与えられた方針にもとづいて証明することができるために

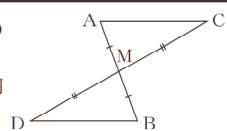
1 全国学力・学習状況調査の結果から

(1) 関連する平成21年度実施の調査問題 (中学校 数学B ④ 中点で交わる2つの線分 参照)

④ 大貴さんは、次の問題を考えています。

問題

右の図のように、線分ABと線分CDがそれぞれの中点Mで交わっています。このとき、 $AC \parallel DB$ となることを証明しなさい。

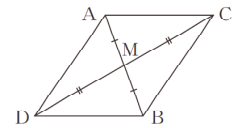


(1) 大貴さんは、次のような証明の方針1を考えました。この証明の方針1にもとづいて、 $AC \parallel DB$ となることの証明を完成しなさい。

証明の方針1

- ① $AC \parallel DB$ を証明するためには、 $\angle MAC = \angle MBD$ (錯角が等しい)を示せばよい。
- ② $\angle MAC = \angle MBD$ を示すためには、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ を示せばよい。
- ③ 仮定の $AM = BM$, $CM = DM$ を使うと、 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ が示せそうだ。

(3) 右の図のように、線分AD、線分CBをひいて四角形ADBCをつくると、次の証明の方針2を考えることもできます。



証明の方針2

- ① $AC \parallel DB$ を証明するためには、四角形ADBCが(①)であることを示せばよい。
- ② このことは、仮定の $AM = BM$, $CM = DM$ を使うと、(②)ことから示せる。

証明の方針2の(①)に当てはまる言葉を書きなさい。また、(②)に当てはまることばを、下のアからオまでの中から1つ選びなさい。

- ア 対角線が垂直に交わる
- イ 対角線の長さが等しい
- ウ 対角線が平行である
- エ 対角線がそれぞれの中点で交わる
- オ 対角線が垂直に交わり、その長さが等しい

(2) 解答類型の反応率「滋賀県版(公立)」からみる分析結果と課題

- ④(1)の問題では、提示された方針にもとづいて証明することが求められる。提示された方針をもとに、三角形の合同を示すために必要なことを見いだして、証明を書くことができるかどうかをみるものである。正答率は、42.1%であり、2つの直線が平行となることを、三角形の合同を利用して証明することに課題がある。
誤答については、仮定として $AC \parallel DB$ を用いている解答類型7の反応率は、10.3%である。
- ④(3)の問題では、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質を見いだしたりするなどして、別の証明の方針を立てることが求められる。線分をひいて四角形をつくったとき、その対辺が平行となることを導くために必要なこと(証明の方針2の①)と、それを仮定から導くための根拠(証明の方針2の②)を見いだせるかどうかをみるものである。正答率は、57.5%であり、2つの直線が平行となることを証明するための方針を完成することに課題がある。
誤答については、証明の方針2の①に平行四辺形や合同以外の表記をしている解答類型9の反応率は、24.8%である。

(3) 学習指導に当たって

- 証明の方針を立てることができるようにする。

証明の学習においては、はじめに、証明を構想することが大切である。証明を構想するには、結論を導くために何が必要であるかを明らかにしたり、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質や関係を見いだしたりするなどして、証明の方針を立てる必要がある。そうすることで、見通しをもって証明を書くことができるようになる。

指導に当たっては、本問題に示した証明の方針1、2のように、結論から仮定、仮定から結論の両方向から考えて、証明の方針を立てる活動を取り入れることが大切である。

○ 方針にもとづいて証明を書けるようにする

証明に用いる事柄について立てた方針を参照しながら証明に用いるものを整理し、その事柄の根拠を明らかにして証明を書く活動を取り入れることが大切である。例えば、設問(1)で、方針を参照しながら、証明として書く順序を検討したり、実際に書いた証明を方針と照らし合わせて、示すべきことが示されているかなどを確認したりする場を設定することが大切である。また、「 $AM=BM$ 、 $CM=DM$ 、 $\angle AMC=\angle BMD$ 」だけでなく、それらの根拠として「仮定から」や「対頂角は等しいので」を示すことや、「 $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ 」だけでなく、その根拠として「2辺とその間の角がそれぞれ等しいから」を示すことができるようにすることが大切である。

その際、次第に形式を整えて証明を書くことができるようにするために、自分たちで書いた証明について互いに見直したり評価したりして、的確で分かりやすい書き方を工夫する活動を取り入れることが有効である。

○ 証明を振り返り、新たな性質を見いだすことができるようにする

証明の学習においては、与えられた性質の証明をするだけでなく、その結果や過程を振り返り、新たな性質を見いだすことが大切である。そのためには、証明を書くことだけでなく、証明をよむことが必要である。そうすることで、数や図形の性質などを見いだし発展的に考える活動に意欲的に取り組むことにつながる。

指導に当たっては、証明の過程で現れた事実や得られた結論に着目し、新たな性質を見つけることができないかを考える機会を設けることが大切である。

2 事例2を生かした取組

(1) 単元名 中学校 第2学年「図形の性質と証明」

(2) 指導計画 (18時間)

次	主 な 内 容	時 間 数
1	三角形	7時間(本時5 / 7)
2	四角形	7時間
3	円	2時間
4	練習問題・ポストテスト	2時間

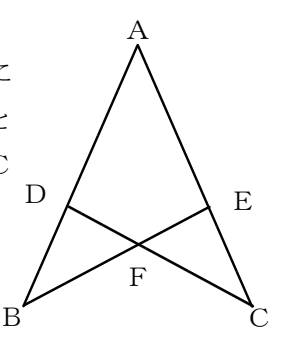
(3) 指導の例

ア 本時のねらい

- ・方針にもとづいた証明を書くことができる。
- ・証明を振り返り、新たな図形の性質を見いだすことができる。

イ 指導過程

※□内は評価の観点を示す。

学習活動と発問	指導上の留意点と評価
<p>1. 課題の把握</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>問題</p> <p>右の図で、$AB=AC$、線分AB上に点D、線分AC上に点Eを$AD=AE$となるようにとります。点Bと点E、点Cと点Dを結んだ交点をFとします。</p> <p>このとき、$BE=CD$となることを証明しなさい。</p> </div> 	<ul style="list-style-type: none"> ・証明をするには、何を証明しようとしているのか、どのようなことが分かっているのかを読み取り、どのような方針を立ててれば証明できるのかを明確にして、方針にもとづいて証明ができるようにすることを確認しておく。

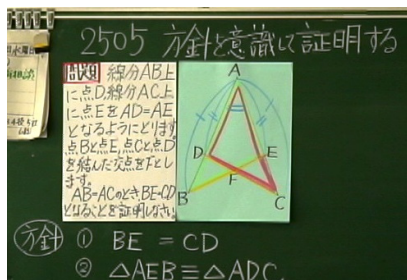
①太郎さんの考えた証明の方針Aを読み取る。

証明の方針A

- ① $BE = CD$ を証明するためには、 $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ を示せばよい。
 ② 仮定より $AD = AE$, $AB = AC$ がいえる。
 ③ 仮定と $\angle BAE = \angle CAD$, を使うと $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ が示せそうだ。

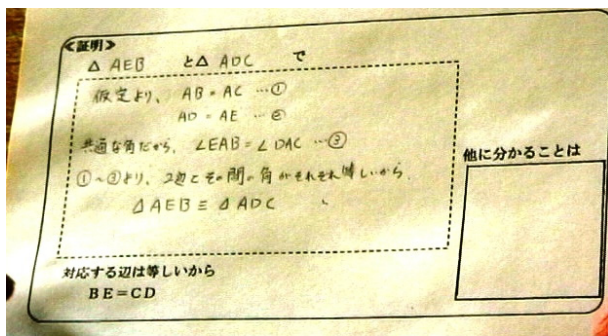
ア 注目している三角形の組を色分けしてみよう。

イ 証明に使える事実を図に書き込んでみよう。



②太郎さんの考えた方針を説明してみよう。

③太郎さんの考えた証明を完成しよう。



2. 課題の追求

①花子さんは点Bと点Cを結び、太郎さんとは違う三角形で証明を考えました。証明の方針Bを完成させて、証明をかきましょう。

証明の方針B

- ① $BE = CD$ を証明するためには、【 ㉞ 】を示せばよい。
 ② $\triangle ABC$ が $AB = AC$ の二等辺三角形であることから【 ㉝ 】がいえる。
 ③ 【 ㉝ 】, 【 ㉞ 】, $EC = DB$ を使うと【 ㉞ 】が示せそうだ。

ア 注目している三角形の組を色分けしてみよう。

イ 証明に使える事実を図に書き込んでみよう。

ウ 空欄【 ㉞ 】, 【 ㉝ 】, 【 ㉞ 】に当てはまる事柄は何でしょう？

- ㉞ $\triangle BEC \equiv \triangle CDB$
- ㉝ $\angle ECB = \angle DCB$ …底角
- ㉞ $BC = CB$ …共通な辺

関 問題に関心を示し、問題の意味を理解している。

• 図中に記号を書き込むと分かりやすいことに気付けるようにする。

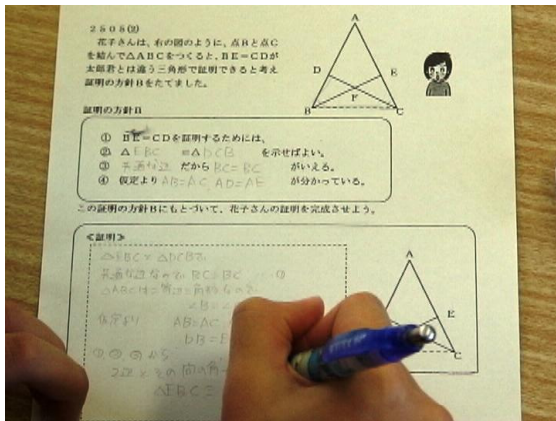
• 等しい関係が成り立つ理由が的確に答えられるか確認をする。

知 三角形の合同条件がいえる。

• 違う方針を立てても証明ができることに気付かせる。

• 解決の見通しがもてない生徒には、等しい辺や等しい角に色をつけさせて、三角形の合同条件にあてはまらないか考えさせる。

考 方針に基づいて、証明を完成させることができる。



②証明を発表する。

△BECと△CDBにおいて
 仮定より $AB=AC \dots ①$
 二等辺三角形の底角は等しいから、
 $\angle ECB=\angle DCB \dots ②$
 ① と $AE=AD$ から、
 $EC=DB \dots ③$
 共通な辺だから、
 $BC=CB \dots ④$
 ②, ③, ④より
 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
 $\triangle BEC \equiv \triangle CDB$
 よって $BE=CD$

③証明を振り返って新たな性質を考える。

花子さんは証明を完成させたあとで、他にも等しい辺や角があったり、その他この図には色々な特徴があることに気が付きました。花子さんは、何に気付いたのでしょうか？

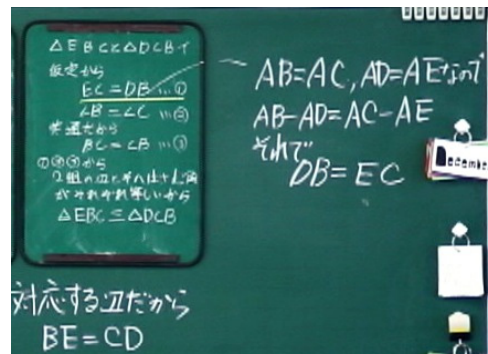
- $BE=CD$, $\angle BDC=\angle CEB$,
 $\angle BCD=\angle CBE$
- $\triangle BDF \equiv \triangle CEF$
- $\triangle FBC$ は二等辺三角形

3. 学習のまとめ

本時の学習で分かったことを出し合おう。

• 証明の板書では、生徒の表記をとりあげながら、この表記の仕方で聞き手に伝わるか、伝わったのかということ意識させる。

下図の左の板書では、 $EC=DB$ となることの根拠が明記されていない。別の生徒が説明を補足したのが右の板書である。



• 根拠となる図形の性質については、用語を正しく使って話させる。

• 証明の方針と証明の進め方は逆方向の思考になっているので、生徒が混乱しないように矢印などをを用いて、思考の流れを整理する。

• 時間に余裕があれば、なぜそう判断できたのか、根拠を明確にして説明させる。

考 証明を見直すことで、新たな図形の性質が見いだせる。

本事例の活用に関わって

○ 生徒なりに筋道立てて説明する活動から始める

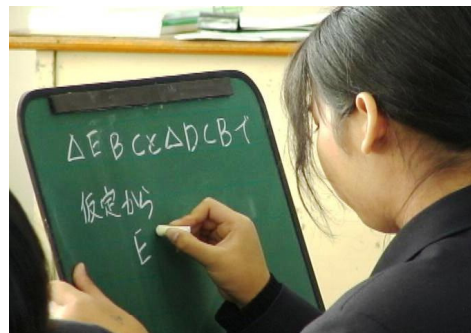
課題の把握では、立てられた方針を読み取り、生徒なりに筋道立てて説明する活動から始めている。根拠を明らかにして説明し伝え合う活動を通して、推論の過程を自分の言葉で他者に分かりやすく表現することを大切にしたい。そして、「ゆえに」、「または」、「同様に」、「したがって」、「一方」、「よって」などの言葉や用語、記号を使うことに慣れるようにし、徐々に推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力を高めていく。

○ 証明を書けるようにするために

簡単な推論について、まず証明の構想や方針をたて、その要点を上述した言葉や用語、記号を適切に用いて自分の言葉で書くことから始め、よりよいものに改めることを大切にする。

本事例の課題追求では、証明の方針の不完全なものをはじめに提示し、必要なものを補うことで推論の過程を明らかにしてから、証明を書かせている。交流の際には、小黒板を利用して、自分たちの書いた証明を見直したり評価したりして、的確で分かりやすい書き方を工夫する活動が必要である。

花子さんの方針については、ワークシートでは一部を示して提示しているが、生徒の状況に応じて空欄にして提示することも考えられる。

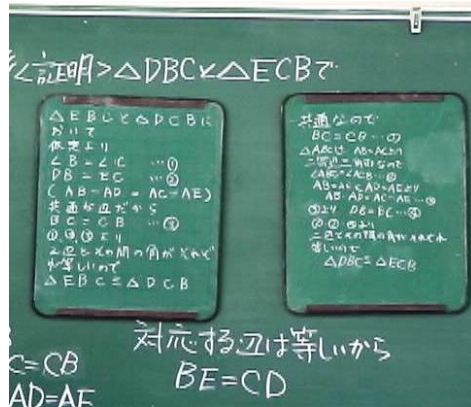


考えた証明を小黒板に書かせ、交流の場面で活用する

○ 証明を振り返り、新たな図形の性質を見いだすこと

証明を読むことは、図形の性質の証明を見直したり、評価したりする際に必要である。しかし、「特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校）」*からも、証明を振り返って新たな性質や関係を見つける指導が十分な成果を上げていない現状がうかがわれる。

本事例では、「証明から他にも等しい辺や角が見つけれないだろうか」という発問で、証明を振り返り、新たな性質を見いだす場を設定している。このように証明を読むことを通して、論理的に考察し表現する能力を養うことを大切にしている。証明を読んで新たな性質を見いだすことは、「B図形」の領域だけでなく、「A数と式」の領域において、文字を用いた式で数量の関係をとらえ説明することを指導する際にも大切にする必要がある。



証明を見比べさせながら、的確で分かりやすい書き方に気付かせる

*特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校）平成18年7月 P19

国立教育政策研究所 教育課程研究センター

証明を振り返って新たな性質や関係を見つけることについては、合同な三角形の対応する辺の長さが等しいことの証明を振り返って、対応する大きさの等しい角を答える問題（3年Ⅱ4（1））の通過率が78.9%であったのに対し、合同な三角形について新たに導くことのできる図形の性質を答える問題（3年Ⅱ4（2））の通過率は37.7%にとどまった。特に後者では、すでに証明の過程で示されている関係をそのまま答えた生徒（解答類型4）が15.0%いた。また、質問紙調査で「証明を振り返って新たな性質や関係を見つける指導を行っていますか」という質問（3年設問8（2））に肯定的な回答をした教師は64.3%であったが、「このように証明したことをよみ直し（振り返り）、図形の性質を新たに見つけたことがありますか」という質問（3年設問8（2））に対して、「はい」と答えた生徒は34.0%であり、指導が十分な成果を上げていない現状がうかがわれた。

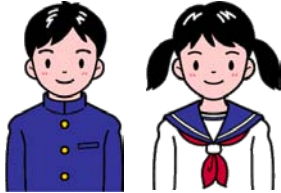
3 学習内容の関連

中1 平面図形

中2 図形の調べ方

中3 図形と相似

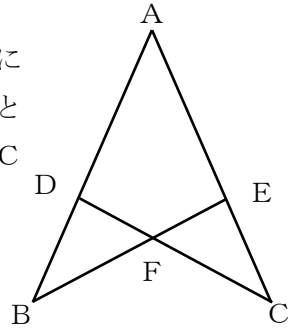
太郎さんと花子さんは、次の問題を考えています。



問題

右の図で、 $AB=AC$ ，線分 AB 上に点 D ，線分 AC 上に点 E を $AD=AE$ となるようにとります。点 B と点 E ，点 C と点 D を結んだ交点を F とします。

このとき、 $BE=CD$ となることを証明しなさい。



太郎さんは、次のような**証明の方針A**を考えました。

この**証明の方針A**にもとづいて、太郎さんの証明を完成させよう。

証明の方針A

- ① $BE=CD$ を証明するためには、 $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ を示せばよい。
- ② 仮定より $AD=AE$ ， $AB=AC$ がいえる。
- ③ 仮定と $\angle BAE = \angle CAD$ ，を使うと $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ が示せそうだ。

《証明》

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において

仮定より $AE=AD$ … ①

$AB=AC$ … ②

共通な角だから、 $\angle BAE = \angle CAD$ … ③

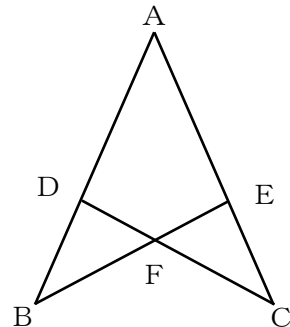
①，②，③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \equiv \triangle ACD$

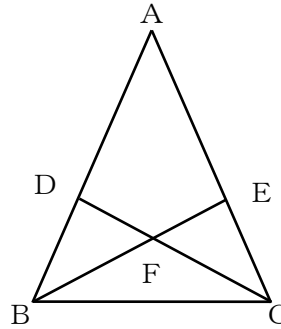
合同な三角形の対応する辺は等しいから

$BE=CD$



学習プリント② 解答例

花子さんは、右の図のように、点Bと点Cを結んで△ABCをつくると、BE=CDが太郎さんとは違う三角形で証明できると考え**証明の方針B**をたてました。



証明の方針B

- ① BE=CDを証明するためには、【 ㉞ 】を示せばよい。
- ② △ABCがAB=ACの二等辺三角形であることから【 ㉝ 】がいえる。
- ③ 【 ㉝ 】, 【 ㉞ 】, EC=DBを使うと【 ㉞ 】が示せそうだ。

この**証明の方針B**にもとづいて、花子さんの証明を完成させよう。

《証明》

△BEC と△CDB において

仮定より $AB=AC$ … ①

二等辺三角形の底角は等しいから、

$\angle ECB=\angle DBC$ … ②

① と $AE=AD$ から、

$EC=DB$ … ③

共通な辺だから、

$BC=CB$ … ④

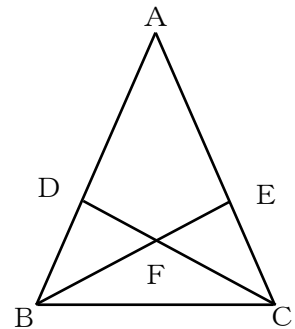
②, ③, ④より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BEC \equiv \triangle CDB$

合同な三角形の対応する辺は等しいから

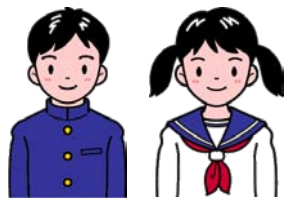
$BE=CD$



花子さんは、証明を完成させたあとで、もう一度図形を見つめ直しました。すると他にも等しい辺や角があったり、その他この図には色々な特徴があることに気が付きました。花子さんは、何に気付いたのでしょうか？

△FBCは二等辺三角形になる

太郎さんと花子さんは、次の問題を考えています。



問題

右の図で、 $AB=AC$ 、線分 AB 上に点 D 、線分 AC 上に点 E を $AD=AE$ となるようにとります。点 B と点 E 、点 C と点 D を結んだ交点を F とします。

このとき、 $BE=CD$ となることを証明しなさい。

A geometric diagram showing an isosceles triangle with vertex A at the top and base BC at the bottom. Point D is on side AB and point E is on side AC . Line segments BE and CD are drawn, intersecting at point F inside the triangle.

太郎さんは、次のような**証明の方針A**を考えました。
この**証明の方針A**にもとづいて、太郎さんの証明を完成させよう。

証明の方針A

- ① $BE=CD$ を証明するためには、 $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ を示せばよい。
- ② 仮定より $AD=AE$ 、 $AB=AC$ がいえる。
- ③ 仮定と $\angle BAE = \angle CAD$ 、を使うと $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ が示せそうだ。

《証明》

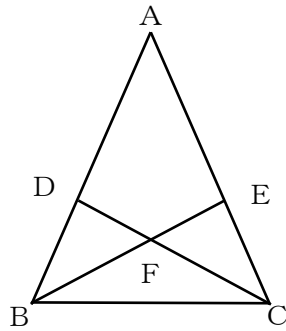
$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において

合同な三角形の対応する辺は等しいから
 $BE=CD$

A smaller version of the geometric diagram from the problem section, showing triangle ABC with points D on AB and E on AC , and intersecting lines BE and CD meeting at F .

学習プリント②

花子さんは、右の図のように、点Bと点Cを結んで△ABCをつくると、 $BE = CD$ が太郎さんとは違う三角形で証明できると考え**証明の方針B**をたてました。

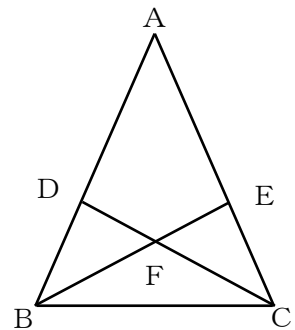


証明の方針B

- ① $BE = CD$ を証明するためには、【 ㉞ 】を示せばよい。
- ② △ABCが $AB = AC$ の二等辺三角形であることから【 ㉝ 】がいえる。
- ③ 【 ㉝ 】, 【 ㉞ 】, $EC = DB$ を使うと【 ㉞ 】が示せそうだ。

この**証明の方針B**にもとづいて、花子さんの証明を完成させよう。

《証明》



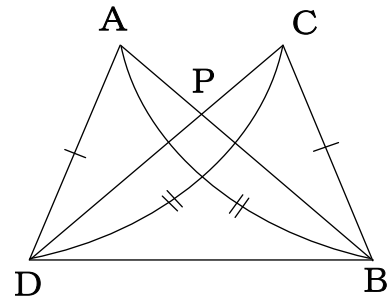
合同な三角形の対応する辺は等しいから

$$BE = CD$$

他に分かることは？

大貴さんは、次の**問題**を考えています。

右の図のように、長さの等しい2つの線分 AB と CD が交わっています。その交点を P とします。
 $AD = CB$ のとき、 $\triangle PDB$ は二等辺三角形になることを証明しなさい。



次の (1) から (3) までの各問いに答えなさい。

(1) 大貴さんは、次のような**証明の方針1**を考えました。この**証明の方針1**にもとづいて、 $\triangle PDB$ は二等辺三角形になることの証明を完成しなさい。

証明の方針1

- ① $\triangle PDB$ が二等辺三角形になることを証明するためには、
 $\angle PBD = \angle PDB$ (2つの角が等しい)
 を示せばよい。
- ② $\angle PBD = \angle PDB$ を示すためには、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ を示せばよい。
- ③ 仮定の $AB = CD$, $AD = CB$ を使うと、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ が示せそうだ。

証明

$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において、

合同な三角形の対応する角は等しいから、

$$\angle ABD = \angle CDB$$

すなわち、

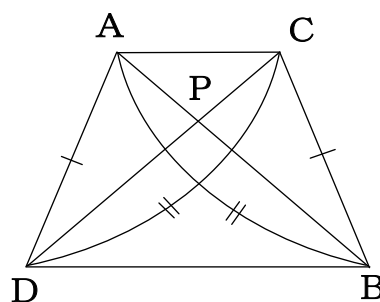
$$\angle PBD = \angle PDB$$

したがって、2つの角が等しいから $\triangle PDB$ は二等辺三角形である。

(2) 大貴さんは、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ をもとにして $\triangle PDB$ が二等辺三角形になることを証明しました。 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ をもとにすると、前ページのプリントの**問題**の図形について、 $\angle ABD = \angle CDB$ や**問題**の仮定以外にも分かることがあります。それを下の**ア**から**エ**までの中から1つ選びなさい。

- ア $\angle APD = \angle CPB$
- イ $\angle BAD = \angle DCB$
- ウ $AB = CD$
- エ $AB = AD$

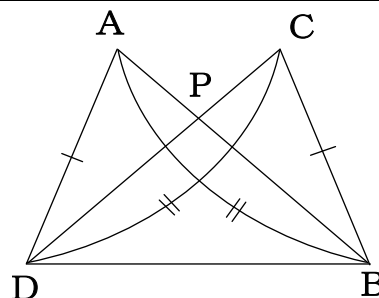
(3) 美咲さんは、前ページのプリントの**問題**の図形について、 AC を線分で結ぶと、 $\triangle PAC$ も二等辺三角形になることに気が付きました。このことを証明しなさい。



証明

大貴さんは、次の**問題**を考えています。

右の図のように、長さの等しい2つの線分 AB と CD が交わっています。その交点を P とします。
 $AD = CB$ のとき、 $\triangle PDB$ は二等辺三角形になることを証明しなさい。



次の (1) から (3) までの各問いに答えなさい。

(1) 大貴さんは、次のような**証明の方針1**を考えました。この**証明の方針1**にもとづいて、 $\triangle PDB$ は二等辺三角形になることの証明を完成しなさい。

証明の方針1

- ◇ $\triangle PDB$ が二等辺三角形になることを証明するためには、
 $\angle PBD = \angle PDB$ (2つの角が等しい)
 を示せばよい。
- ◇ $\angle PBD = \angle PDB$ を示すためには、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ を示せばよい。
- ◇ 仮定の $AB = CD$, $AD = CB$ を使うと、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ が示せそうだ。

証明

$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において、

仮定から、 $AB = CD$ ……①

$AD = CB$ ……②

共通な辺だから、

$BD = DB$ ……③

①, ②, ③より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$

合同な三角形の対応する角は等しいから、

$\angle ABD = \angle CDB$

すなわち、 $\angle PBD = \angle PDB$

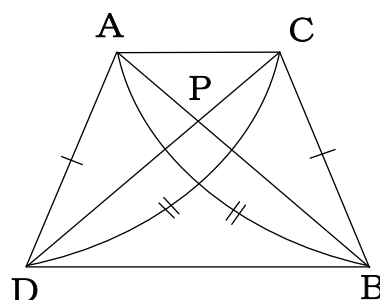
したがって、2つの角が等しいから $\triangle PDB$ は二等辺三角形である。

(2) 大貴さんは、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ をもとにして $\triangle PDB$ が二等辺三角形になることを証明しました。 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ をもとにすると、前ページのプリントの**問題**の図形について、 $\angle ABD = \angle CDB$ や**問題**の仮定以外にも分かることがあります。それを下の**ア**から**エ**までの中から1つ選びなさい。

- ア $\angle APD = \angle CPB$
- イ** $\angle BAD = \angle DCB$
- ウ $AB = CD$
- エ $AB = AD$

(3) 美咲さんは、前ページのプリントの**問題**の図形について、 AC を線分で結ぶと、 $\triangle PAC$ も二等辺三角形になることに気が付きました。このことを証明しなさい。

証明



$\triangle ADC$ と $\triangle CBA$ において、

仮定から、 $CD = AB$ ……①

$AD = CB$ ……②

共通な辺だから、

$AC = CA$ ……③

①、②、③より、

3辺がそれぞれ等しいから、

$\triangle ADC \equiv \triangle CBA$

合同な三角形の対応する角は等しいから、

$\angle ACD = \angle CAB$

すなわち、 $\angle ACP = \angle CAP$

したがって、2つの角が等しいから $\triangle PAC$ は二等辺三角形である。

別証1

$\triangle PDB$ は二等辺三角形だから、 $PD = PB$ ……①

①と $CD = AB$ から、 $PC = PA$ ……②

したがって、2つの辺が等しいから $\triangle PAC$ は二等辺三角形である。

別証2

$\triangle APD = \triangle ABD - \triangle PDB$ ……①

$\triangle CPB = \triangle CDB - \triangle PDB$ ……②

①、②と $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ から、 $\triangle APD \equiv \triangle CPB$

合同な三角形の対応する辺は等しいから、 $AP = CP$

したがって、2つの辺が等しいから $\triangle PAC$ は二等辺三角形である。