

事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を説明するために

1 全国学力・学習状況調査の結果から

(1) 関連する平成20年度実施の調査問題（中学校 数学B ⑤ 富士山の気温 参照）

⑤ 里奈さんたちは、下のパンフレットを見ながら、8月に行く「富士五湖めぐり」と「富士山6合目登山」の計画を立てています。

(2) 里奈さんと憲一さんは、富士山の6合目の気温について話しています。

里奈さん「6合目の気温を調べようとしたけれど、6合目には観測所がないから、気温が分からないよ。」
 憲一さん「気温は、地上から1万mぐらいまでは、高さが高くなるのにもなって、ほぼ一定の割合で下がるんことが知られているよ。」
 里奈さん「そのことを利用すれば、6合目の気温は分かるかな。」

下線部から、「地上から1万mぐらいまでは、高さが高くなるのにもなって、気温が一定の割合で下がる」と考えるとき、高さ x mの気温を y °Cとすると、 x と y の間には、いつでもいえる関係があります。次ページのAからオの中から正しいものを1つ選びなさい。

(3) 里奈さんは、富士山周辺と山頂の8月の平均気温を調べました。そして、下の表のようにまとめ、高さ(標高) x mのときの気温を y °Cとして、グラフに表しました。

観測所	標高(m)	平均気温(°C)	観測所	標高(m)	平均気温(°C)
A(甲府)	273	27.7	D(河口湖)	860	23.3
B(勝沼)	394	26.7	E(山中)	992	21.7
C(古閑)	552	24.9	F(富士山)	3775	6.4

里奈さんは、「高さが高くなるのにもなって、気温が一定の割合で下がる」ことをもとに、表やグラフのDとFのデータを用いて、6合目のおよその気温を求めることにしました。

このとき、6合目(2500m)のおよその気温を求める方法を説明しなさい。ただし、実際に気温を求める必要はありません。

(2) 解答類型の反応率「滋賀県版(公立)」からみる分析結果と課題

- ⑤(2)の問題では、事象を理想化したり単純化したりしてとらえ、言葉で表現された事柄の数学的な意味を考慮することが求められる。変化の割合が一定であるということから、「いつでもいえる関係は、 y が x の一次関数である」と判断できるかどうかをみるものである。正答率は、24.4%であり、言葉で表現された事柄について、変化の割合が一定であることから一次関数であることを判断することに課題がある。
 誤答については、 y が x に比例していると考えた解答類型1の反応率が、32.4%である。また、 y が x に反比例していると考えた解答類型2の反応率は、24.1%である。
- ⑤(3)の問題では、事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することが求められる。気温(y °C)は標高(x m)の一次関数であるとみなし、標高が2500mのときの気温を求める方法を、グラフや式などの「用いるもの」と「その使い方」を明示して説明できるかどうかをみるものである。正答率は、12.1%であり、データでは与えられていない標高に対応する気温の求め方について、その方法を説明することに課題がある。
 誤答については、「用いるもの」は示しているが、「その使い方」を示していない解答類型3と解答類型8の反応率を合わせると、20.2%である。

(3) 学習指導に当たって

- 日常的な事象を理想化・単純化して、その特徴を的確にとらえられるようにする
 授業で実際のデータを観察する場面を取り入れ、表やグラフに表す活動を通して、理想化・単純化する過程を経験できるようにすることが考えられる。また、例えば、設問(2)のように、「一定の割合で下がる」ということを「変化の割合が一定である」ととらえて、一次

関数と判断することなど、言葉で表現された事柄の数学的な意味を考えられるようにすることも大切である。さらに、とらえた関係を式や記号を用いて表すことができるようにすることも大切である。

○ 事象を数学的に解釈し、問題解決に数学を活用できるようにする

授業で実際のデータを用い、数学の知識・技能、見方や考え方を活用して、問題を解決する活動を取り入れることが考えられる。例えば、設問(3)のように、標高と気温の関係を表す実際のデータをグラフに表すと、点がほぼ直線上に並ぶことから、その関係を一次関数とみなすことができ、直線のグラフをかくことによって、データの無い場所の気温をよみとることができる。このような経験を通して、数学を様々な場面で活用する意欲や態度を養うことが大切である。

○ 問題解決のために数学を活用する方法を考え、説明できるようにする

与えられた方法を用いて解決させるだけでなく、生徒が数学を活用する方法を見いだすようにすることが考えられる。また、その方法について、グラフや式などの「用いるもの」と「その使い方」について説明する場面を設定することが大切である。例えば、グラフを用いる場合には、どの2点で直線を決めるか、グラフ上のどの数値をよめばよいかなどを具体的に説明できるようにすることが大切である。

2 事例

(1) 単元名 中学校 第2学年「一次関数」

(2) 指導計画 (15～16時間)

次	主 な 内 容	時 間 数
1	一次関数と変化のようす	4時間
2	一次関数のグラフ	4時間
3	方程式とグラフ	3時間
4	一次関数の利用	3時間
5	いろいろな関数の利用 (発展的な内容を含む)	1～2時間(本時1/2)

(3) 指導の例

ア 本時のねらい

- ・データを分析して表やグラフにしなが、事象を理想化・単純化しながら、2変量の関係を見つけ出せるようにする。
- ・問題を解決する過程で、関数の知識や考え方のよさに気づくとともに、それらを活用する方法を考え、説明できるようにする。

イ 指導過程

※内は評価の観点を示す。

学習活動と発問	指導上の留意点と評価
1. 課題の把握	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>昭夫さんと、里子さんは、それぞれA大学、B大学の学園祭の運営委員長をしています。今年、大学の有志でコンサートを開く予定をしています。このコンサートで入場料をとって、その入場料を学園祭の運営費にまわそうと考えています。入場料がいくらならば何人ぐらい入ってもらえるのかを予想するために、それぞれの大学で、いくらまでなら入場しようと思うのかアンケートをとってみました。そのアンケート用紙が次の表です。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><アンケート> コンサートの入場料がいくらまでなら、入場しますか。 次のどれかに○をつけてください。</p> </div> </div>

- | | |
|------------|-------------|
| () 200円まで | () 800円まで |
| () 400円まで | () 1000円まで |
| () 600円まで | |

このアンケートの結果を集計したのが次の表です。

<昭夫さんのA大学>

<里子さんのB大学>

上限入場料(円)	200	400	600	800	1000
集計人数(人)	106	96	103	98	100

上限入場料(円)	200	400	600	800	1000
集計人数(人)	304	97	51	31	119

さて、それぞれの大学の場合で、運営費をたくさん集めるために、入場料をいくらに設定すればいいだろうか。

① 運営費がたくさん集められるのは、どんなときだろうか。

- ・入場者数が多いときがよい。
- ・入場料が高いときが多く集められる。
- ・でも入場料が高いと入場者数が減る。

・入場料が多ければ入場者数が少なくなるだろうという感覚を引き出して、登場人物の悩みを感じ取れるようにしたい。

② 表のデータをどうすればよいか。

- ・入場者数と入場料をかけたらよい。
- ・集計人数が入場者数になるのだろうか。
- ・1000円と答えた人は、他の場合も入る。
- ・データから予想入場者数を出せばよい。

・このままのデータを使ってしまう生徒がいると予想されるので、それが間違いであることを生徒の中から出させたい。

関 問題に関心を示し、問題の意味を理解しているか。

2. 課題の追求

① 予想入場者数を計算して、新しい表を作成する。

<昭夫さんのA大学>

<里子さんのB大学>

入場料(円)	200	400	600	800	1000
予想入場数(人)	503	397	301	198	100

入場料(円)	200	400	600	800	1000
予想入場数(人)	602	298	201	150	119

② 入場料が300円のときの入場数を予想してみよう。

- ・300円は、200円と400円の間の数だろう。
- ・Aは一次関数なので減り方が一定だからそれができる。
- ・Bは減り方が一定でないので、簡単に計算できない。
- ・Bは反比例だから、600円の2倍ではないだろうか。
- ・グラフにして調べてみよう。

・班で話し合せて、いろいろな意見を出させたい。

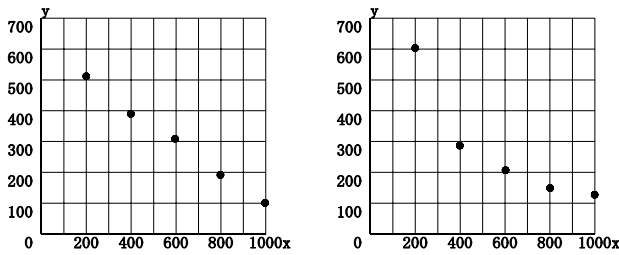
・比例や反比例、一次関数の言葉が出てくると予想されるので、それぞれの特徴を振り返らせながら話し合せてたい。

知 今まで学習した関数の知識を正しく振り返っているか。

・理由を考えるなかで、グラフを使って説明する方法に気付かせたい。

<A大学>

<B大学>



③ 各班の意見を出し合う。

・グラフをかいてみると、それぞれの変化の様子の違いに気づきやすい。このことから、グラフのよさに気付かせたい。

・グラフの特徴から、一次関数や反比例であることを説明したり、グラフから式をつかって求めたりすることもできる。

・いろいろな方法で説明し合う。

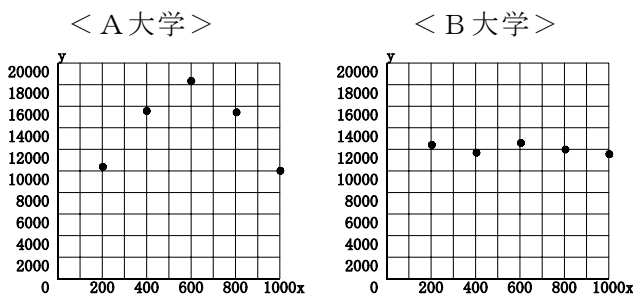
考 関数の知識や表現方法を利用して、うまく説明できているか。

④ 合計入場料を計算して、新しい表を作成する。

< A 大学 >	入場料(円)	200	400	600	800	1000
	合計入場料(円)	100600	158800	180600	158400	100000
< B 大学 >	入場料(円)	200	400	600	800	1000
	合計入場料(円)	120400	119200	120600	120000	119000

⑤ 入場料と合計入場料の関係を調べて、入場料をいくらにすればいいかを考えよう。

- ・ A は 600 円のときが一番多くなる。
- ・ B も 600 円のときが多いが、ほとんど同じ。
- ・ グラフにしてみるといいのでは。



・グラフで表してみることで、B の場合がほぼ一定であるのとらえさせることができる。また、反比例の積が一定という特徴が出ていることに気付かせたい。

・A の場合は、500 円や 700 円のときを考えさせてみるとよい。その点をグラフに追加してみると、さらにわかりやすい。

・A の場合は、未習の関数であるので、深入りはしないが、今までとはちがった関数があることを知らせておくと 3 年生以降の学習につながる。

3. 学習のまとめ

今日の学習から気づいたことを出し合おう。

・反比例や一次関数の特徴をうまく使うと、問題を解決する方法に活用できることを気付かせたい。

3 学習内容の関連

中 1 比例と反比例

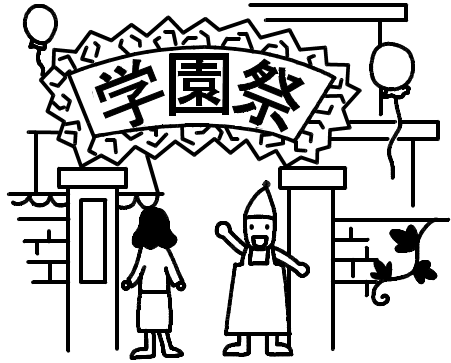
中 2 連立方程式

中 3 関数 $y = ax^2$

※ ④以降の活動は、発展的な内容を含むので、注意して取り扱いたい。また、中 3 の関数の学習を終えた後に、課題学習として取り上げるのもよい。

コンサートチケットの料金は？

昭夫さんと、里子さんは、それぞれA大学、B大学の学園祭の運営委員長をしています。今度、大学の有志でコンサートを開く予定をしています。このコンサートの入場料を学園祭の運営費にまわそうと考えています。入場料の金額によって、何人ぐらい入場者があるか予想するために、それぞれの大学でアンケートをとってみました。アンケートをとって集計してみると、次のようになりました。



昭夫さん
A大学

入場料(円)	200	400	600	800	1000
予想入場数(人)	503	397	301	198	100



里子さん
B大学

入場料(円)	200	400	600	800	1000
予想入場数(人)	602	298	201	150	119

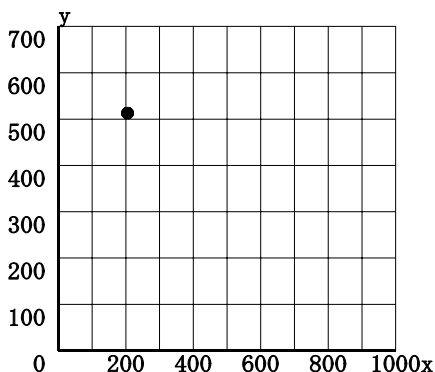
2人は同じ運営委員長として、お互いの大学のデータをみながら、相談しています。

昭夫 「僕の大学も君の大学も、入場料が上がると入場数は減りそうだね。」
里子 「でも、減り方が少し違うみたいだよ。グラフにして調べましょう。」

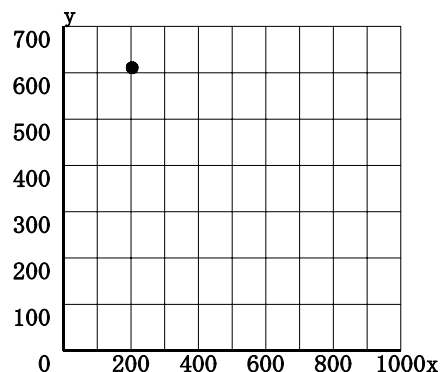
次の問題に答えましょう。

(1) 入場料を x 円、予想入場数を y 人として、それぞれの大学のデータをグラフ上にとりたいたいと思います。いま、それぞれの大学の入場料200円の場合のデータを示す点でとりました。残りの400円、600円、800円、1000円のデータを示す点をとりなさい。

① 昭夫さんのA大学



② 里子さんのB大学



(2) 2人が次のように話し合っています。

昭夫 「入場料が300円的时候は、どれぐらゐの入場者数になるのだらう。
ちやうど200円と400円の間だから、503人と397人の間と考へて、僕の
大学は450人と予想できるなあ。」

里子 「じゃあ、私の大学は、同じようにすると、602人と298人の間だから、
私の大学も450人と予想できるね。」

2人の予想はそれぞれ正しいといえるでしょうか。正しい場合は○、正しくない場合は×をそれぞれつけなさい。また、その理由を説明しなさい。

昭夫さん	
------	--

里子さん	
------	--

理由	
----	--

(3) さらに2人は、次のように話しています。

昭夫 「どの入場料にすれば、一番たくさん入場料を集められるだらうか。
入場料を増やしても、入場数が減ってしまったら意味がないからなあ。」

里子 「入場料とそのときの予想入場数をかけたら、入場料の合計がでるよね。
やってみましょう。」

昭夫 「僕の大学は、入場料 円的时候が合計が一番多くなったよ。」

里子 「私の大学は、どうなんだらう・・・？」

昭夫さんの大学の場合、入場料とそのときに予想される合計入場料の表の一部が次のようになっています。残りの400円、600円、800円的时候を計算して、5つの場合の中で入場料がいくらのとき、合計入場料が一番多くなるかを答えなさい。

入場料(円)	200	400	600	800	1000
合計入場料(円)	100600				100000

入場料が 円的时候、合計入場料が一番多くなる。

(4) 里子さんの大学の場合は、次の表のようになった。

入場料(円)	200	400	600	800	1000
合計入場料(円)	120400	119200	120600	120000	119000

里子さんの大学の表から、2人は次のように話しています。

里子 「私の大学は、入場料が600円のとかが合計入場料が1番多いと考えるといいのかなあ。」

昭夫 「君の大学の場合は、それぞれの合計入場料の差がほとんどないので、どんな入場料でも合計入場料が同じになると考えていいと思うよ。」

里子 「なるほど、そう考えたほうがいいみたいだね。」

昭夫 「あっ、今わかったんだけど、里子さんの大学の合計入場料がいつも同じだということは、入場料を x 円、そのときの予想入場数を y 円としたとき、 x と y との関係がみえてきたぞ。」

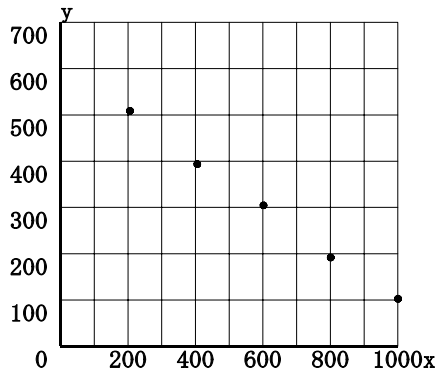
里子 「えっ、どんな関係なの？」

さて、里子さんの大学の入場料 x 円と予想入場数 y 人の関係には、どんな関係があると考えられますか。次のア～オのなかで、あてはまるものをすべて選び、記号で答えなさい。

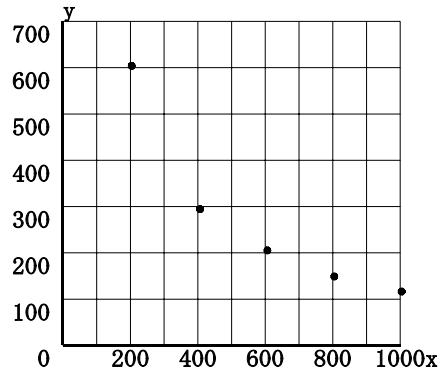
- ア. y は x に比例する。
- イ. y は x に反比例する。
- ウ. y は x の一次関数である。
- エ. x と y の和が一定である。
- オ. x と y の積が一定である。

解答例

(1) ① 昭夫さんのA大学



② 里子さんのB大学



(2)

昭夫さん	○
------	---

里子さん	×
------	---

理由	<p>昭夫さんの場合は変化の割合がほぼ一定なので2つの数の中間の値を予想の数にできるが、里子さんの場合は一定でないのでその考え方はできない。</p> <p>(昭夫さんの場合はグラフがほぼ一直線上に並ぶので2つの数の中間の値を予想の数にできるが、里子さんの場合は一直線上に並ばないのでその考え方はできない。)</p>
----	---

(3)

入場料(円)	200	400	600	800	1000
合計入場料(円)	100600	158800	180600	158400	100000

入場料が 600 円するとき、合計入場料が一番多くなる。

(4)

イ , オ
