

発展的に考え、予想した事柄を説明するために

1 全国学力・学習状況調査の結果から

(1) 関連する平成20年度実施の調査問題（中学校 数学B 2 位を入れかえた数 参照）

2 直樹さんは、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を
入れかえた数の和がどんな数になるかを考えています。

21 のとき	$21 + 12 = 33$	$33 = 11 \times 3$ $88 = 11 \times 8$ $121 = 11 \times 11$ いつでも11の倍数に なるのかな。
35 のとき	$35 + 53 = 88$	
47 のとき	$47 + 74 = 121$	
82 のとき	<input type="text" value="①"/>	

上で調べたことから、直樹さんは、次のことを予想しました。

直樹さんの予想

2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和は、
11の倍数になる。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 上の に当てはまる式を書きなさい。

(2) 直樹さんの予想が正しいことの説明を完成しなさい。

説明

2けたの自然数の十の位の数を x 、一の位の数を y とすると、
2けたの自然数は、 $10x + y$
十の位の数と一の位の数を入れかえた数は、 $10y + x$
と表される。
したがって、それらの和は、

$$(10x + y) + (10y + x) =$$

11の倍数であることを説明するには、
11と自然数の積になることをいえば
いいんだ。

(3) 直樹さんは、
2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差
は、どんな数になるかを考えてみたいと思い、いくつかの場合を調べました。

41 のとき	$41 - 14 = 27$
53 のとき	$53 - 35 = 18$
82 のとき	$82 - 28 = 54$
⋮	⋮

これらのことから、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の
数を入れかえた数の差について、どのようなことが予想できますか。
前ページの直樹さんの予想のように、「は、……になる。」という形
で答えなさい。ただし、55のように、十の位の数と一の位の数が等しい
数は考えないことにします。

(2) 解答類型の反応率「滋賀県版（公立）」からみる分析結果と課題

- 2(1)の問題では、「2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和」という問題場面について、考察の対象を明確にとらえているかどうかをみるものである。正答率は、75.3%である。
誤答については、110と解答している解答類型3と、 $82 + 28$ まではできている解答類型4の反応率を合わせると、反応率は13.9%である。この中には、本題においては考察の対象を明確にとらえていたが、表現が十分でない生徒がいると考えられる。
- 2(2)の問題では、予想された事柄が成り立つ理由を、示された方針にもとづいて説明することが求められる。「2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和が、11の倍数になる」ことを、文字式を用いて説明することができるかどうかをみるものである。正答率は、40.0%であり、予想された事柄が成り立つ理由を、示された方針にもとづいて説明することに課題がある。
誤答については、与えられた文字式を計算し、 $11x + 11y$ としただけで、文字式をもとにして根拠と結論に関する記述のない解答類型7の反応率は、16.2%である。
- 2(3)の問題では、発展的に考え、予想した事柄を説明することが求められる。2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差についての性質を予想でき

るかどうか、そして、その予想した事柄を「～は、……になる。」という形で表現できるかどうかをみるものである。正答率は、48.1%であり、発展的に考え、予想した事柄を「～は、……になる。」という形で表現することに課題がある。

(3) 学習指導に当たって

○ 事柄を予想することを大切にする

数や図形について成り立ちそうな事柄を帰納的に見いだす活動や類推する活動などにおいて、生徒が自由な発想で予想し、その予想を表現する機会を多く設定することが大切である。その上で、表現された予想について、成り立つ例や反例を考えるなど具体的に確かめる活動を通して、生徒が証明や説明の必要性をより実感できるようにすることが大切である。また、証明や説明を振り返ることによって、新たな性質を予想するなど、発展的に考える学習も大切である。

○ 事柄を「～は、…になる（である）」という形で表現できるようにする

数や図形に関する性質を「～は、…になる（である）」の形で表現する機会を設定することが考えられる。授業では、学習が進むと、主語に当たる部分が省略されてしまうことがあるため、「～は…になる（である）」の形を意識して、主語と述語を明確に表現できるようにすることが大切である。

○ 事柄が成り立つ理由を説明するための見通しをもつことができるようにする

説明の見通しをもつことができるようにするために、結論を導く上で何を明らかにすればよいかを、具体的な例を通して考察する活動を取り入れることが必要である。

例えば、本問題の「2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和」については、次のような例を通して、「11の倍数であることを説明するためには、式を $11 \times (\text{自然数})$ の形にすればよい。」という見通しをもつことができるようにする。

$21 + 12 = 33 = 11 \times 3$ $35 + 53 = 88 = 11 \times 8$ $47 + 74 = 121 = 11 \times 11$ $82 + 28 = 110 = 11 \times 10$

このように、説明の見通しをもった上で、文字式を用いた説明につなげていくことが大切である。

2 事例

(1) 単元名 中学校 第2学年「式と計算」

(2) 指導計画 (14時間)

次	主 内 容	時 間 数
1	式と計算 単項式と多項式	8時間
2	式の利用 数量の調べ方	5時間
3	課題学習「長方形で作る立体の体積を考えよう」	1時間 (本時)

(3) 指導の例

ア 本時のねらい

・紙の折り方と体積の関係を帰納的にとらえ、文字を用いることで一般的な説明が簡潔にできることに気付き、その説明をすることができる。

イ 指導過程

※□内は評価の観点を示す。

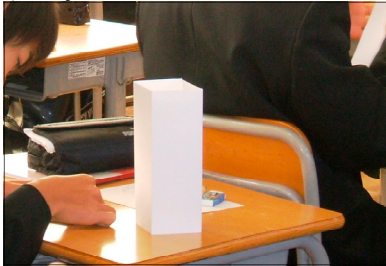
学習活動と発問	指導上の留意点と評価
---------	------------

1. 既習内容の想起

① 本時の課題に取り組むために、柱体の体積の計算を復習する。

- ・正四角柱
(底面の一辺が 5 cm, 高さ 8 cm)
- ・円柱 (半径 4 cm, 高さ 5 cm)

② 「セレクト豆屋」では、マス 1 杯 300 円で小豆を売っています。マスは A 4 サイズの長方形の板から作った正四角柱の形をしたマス A (横辺折り) とマス B (縦辺折り) の 2 種類があり、客が自分でマスを選ぶことができます。どちらのマスの方が得でしょうか。



③ 問題を、次の〔問題 1〕に置きかえ、単純にしよう。

2. 〔問題 1〕の把握

○ 横 40cm, 縦 20cm の長方形で考えよう。

◎見取図を示す。

- ・柱体の体積 = 底面積 × 高さを確認する。
- ・円周率 π を 3.14 とする。

◎生活場面での導入を図る。

◎マス A と B の体積の大きさを予想するため紙で正四角柱の側面の模型を作る。

関 正四角柱の側面 A, B を作り、正四角柱の大きさを調べている。

- ・実際に A 4 サイズの紙を折り、マス A とマス B をつくり、比べてみる。
(マス A, マス B, 同じの人数確認)

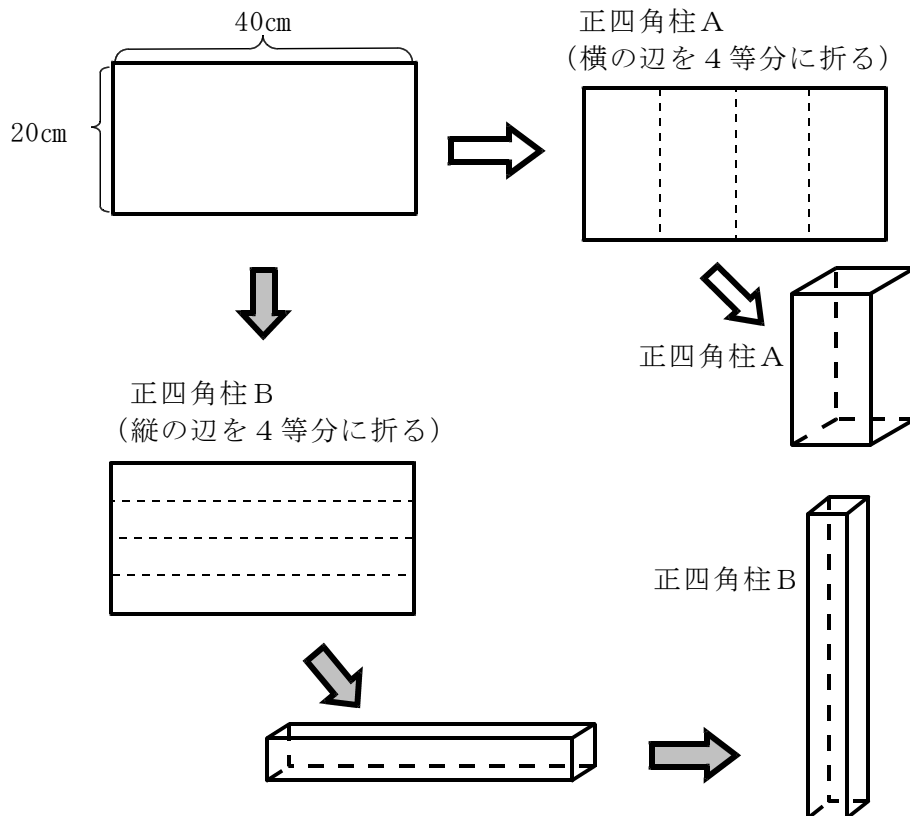


底辺と高さとは違っていると比べにくく、確信が得られない。



◎問題を単純化して、課題に取り組ませる。

〔問題 1〕 横 40cm, 縦 20cm の長方形の紙を、図のように折り、2 通りの正四角柱 A, B の側面をつくります。



正四角柱Aと正四角柱Bの体積について、どちらが大きいかを、佐藤さん、鈴木さん、田中さんが、話し合っています。

底面が大きいからAが大きいかな。

並べると高いのでBが大きいようだ。

同じ長方形でつくるので結局同じでは・・・。



佐藤さん



鈴木さん



田中さん

あなたは、どう考えますか。その理由もいいなさい。

3. [問題1]の解決

- 計算して、考えてみよう。

$$A = (10 \times 10) \times 20 = 2000 \text{ cm}^3$$

$$B = (5 \times 5) \times 40 = 1000 \text{ cm}^3$$

4. [問題2]の把握

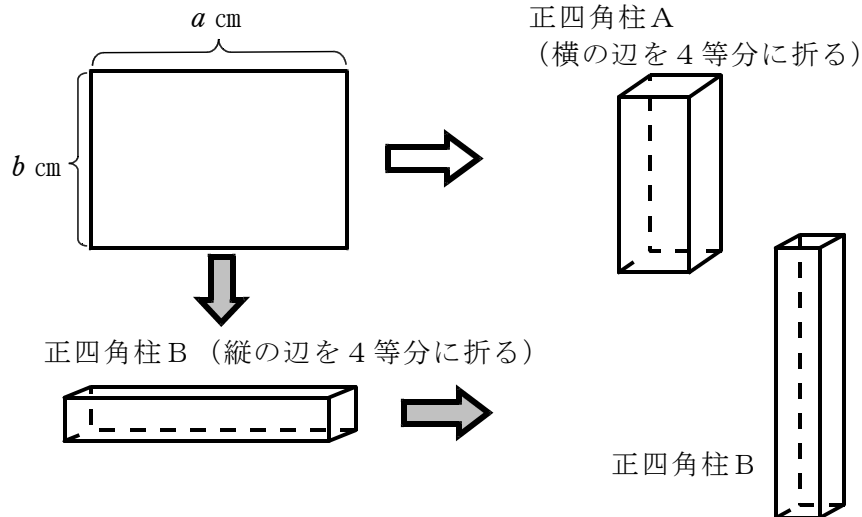
- 一般化して、横が縦より長い、横 a cm、縦 b cmの長方形の紙で考えてみよう。

- ・ 予想を聞き、その根拠を問う。

- ◎ 文字を使い、一般化することに目を向けさせる。

[問題2] 横が縦より長い、横 a cm、縦 b cmの長方形の紙を折り、正四角柱Aと正四角柱Bの側面をつくったとき、正四角柱Aと正四角柱Bの体積は、どちらが大きいですか。

また、その理由を文字を使って説明しなさい。



5. [問題2]の解決と追求

- ① 文字を使って、計算しよう。

$$A = \left(\frac{a}{4} \times \frac{a}{4} \right) \times b = \frac{1}{16} a^2 b$$

$$B = \left(\frac{b}{4} \times \frac{b}{4} \right) \times a = \frac{1}{16} ab^2$$

- ② どちらが大きいか、比べてみよう。
(1) AがBの何倍かより

表 文字を使い、正四角柱の体積を計算することができる。

- ・ 机間指導により、体積の公式を確認する。

考 文字式を比較し、体積の関係を見つけることができる。

$$A \div B = \frac{1}{16} a^2 b \div \frac{1}{16} ab^2$$

$$= \frac{a}{b} > 1 \quad A \text{の方が大きい}$$

(2) 比より

$$A : B = \frac{1}{16} a^2 b : \frac{1}{16} ab^2$$

$$= a : b$$

$a > b$ より Aの方が大きい。

③ AとBの体積の関係を，文章で表してみよう。

- ・ Aの体積は，Bの体積の $\frac{a}{b}$ 倍である。
- ・ AとBの体積の比は， $a : b$ である。

6. 学習のまとめ

① 今日の学習で分かった図形の性質は，何ですか。

- ・ 横 a cm，縦 b cmの長方形で，正四角柱の側面をつくると，体積比は，
横辺折り：縦辺折り = $a : b$
 になる。

② 結局，「セレクト豆屋」では，あなたはどちらのマスを選びますか。

- ・ マスA（実測より，約1.4倍）

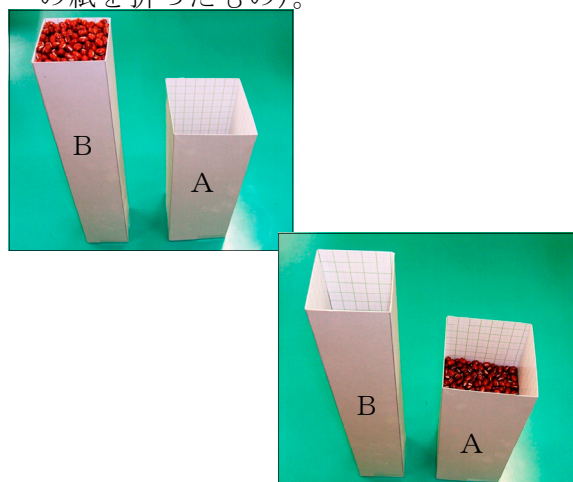
◎ 「～は，…である。」の形で表現する。

表 主語と述語を明確にして表現できる。

◎ 文字を使うことにより，AとBの関係を明確にとらえることができる（発見できる）という，文字式活用の有用性にふれる。

* [問題3]は宿題とする。また，家庭学習の中で【発展1】と【発展2】にも，チャレンジするよう促す。

- ・ Bマスに満たした小豆を，Aマスに入かえて，その体積の違いを確認する（Bマス，Aマスは導入で扱ったA4サイズの紙を折ったもの）。



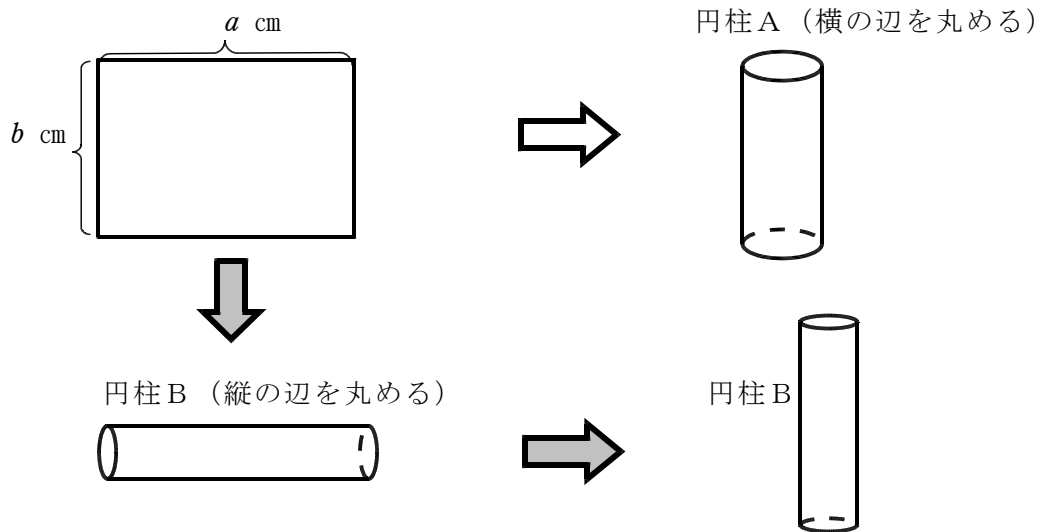
3 学習内容の関連

中1 文字と式

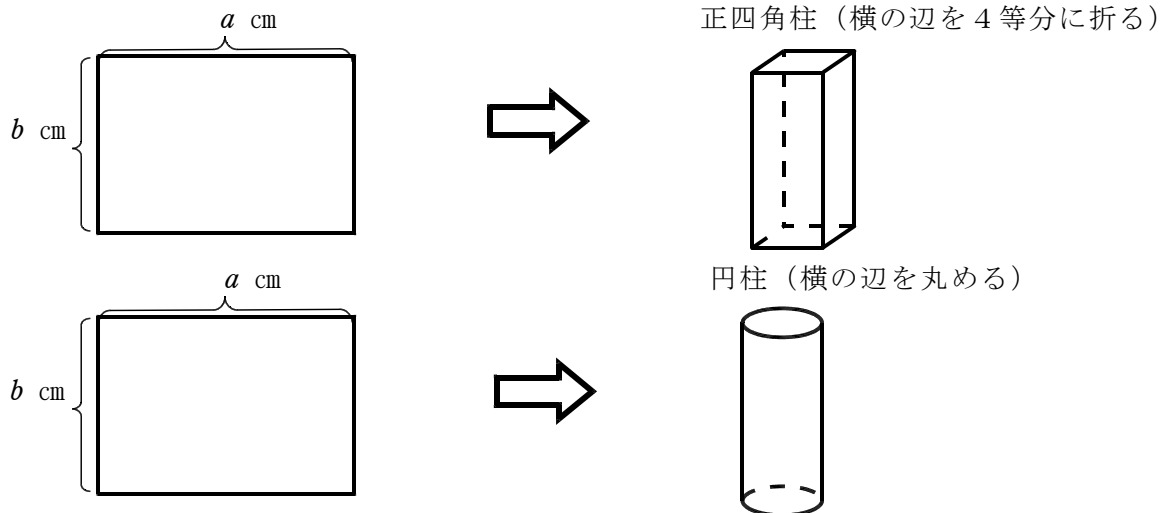
中2 連立方程式
一次関数

中3 多項式
相似と比

〔問題3〕 長方形の紙で円柱の側面をつくる場合も、正四角柱をつくるときと同じことがいえるか調べてみましょう。



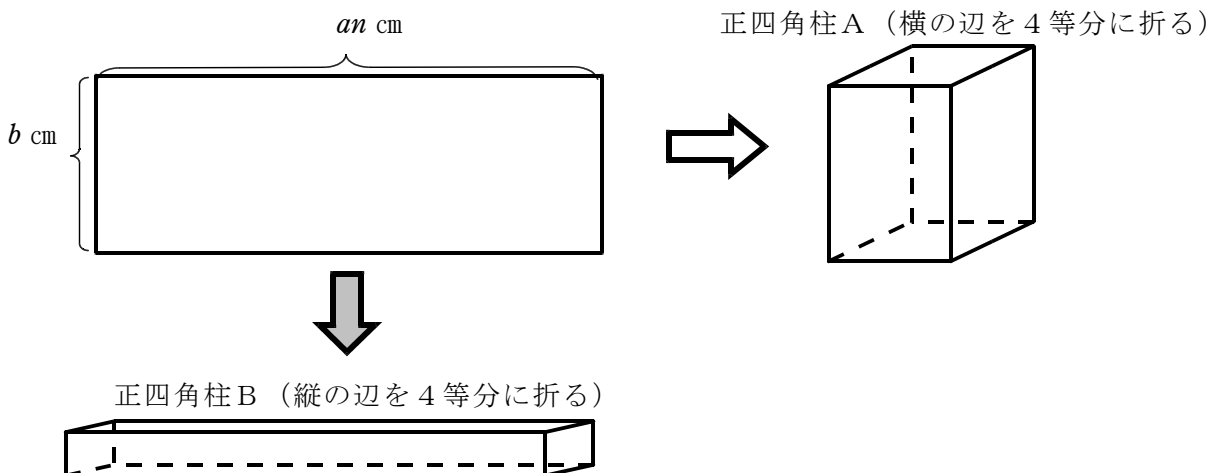
【発展1】 同じ長方形の紙を側面にして、正四角柱と円柱をつくります。どちらの体積が大きくなると思いますか。〔問題2〕や〔問題3〕で求めた結果を基に考えましょう。



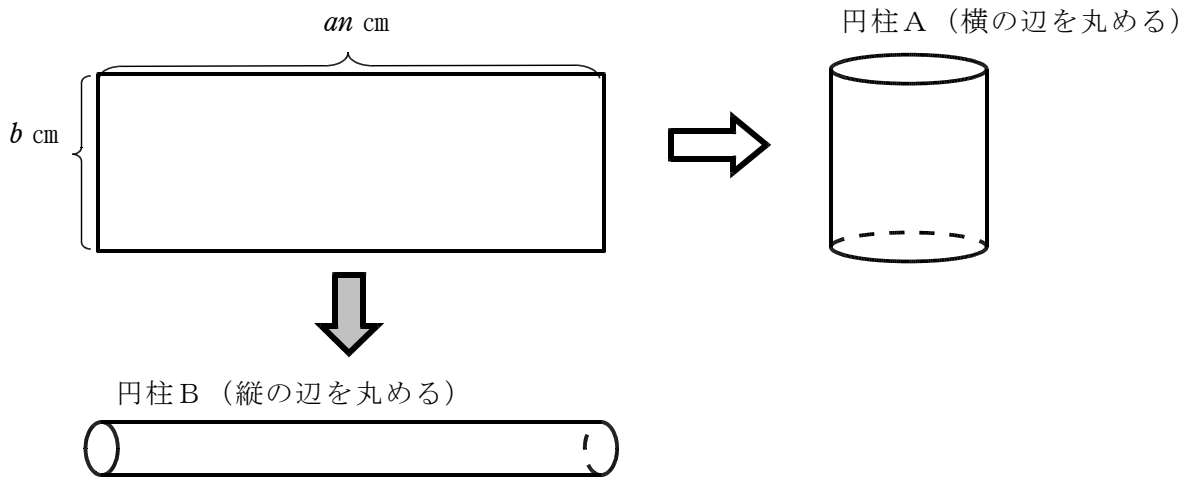
【発展2】

長方形の紙の横の長さを2倍、3倍、・・・、 n 倍と変えていくとき、次の問いに答えましょう。

- ① 横の辺を4等分に折って側面をつくる正四角柱Aの体積は、どのように変わっていきますか。
- ② 縦の辺を4等分に折って側面をつくる正四角柱Bの体積は、どのように変わっていきますか。

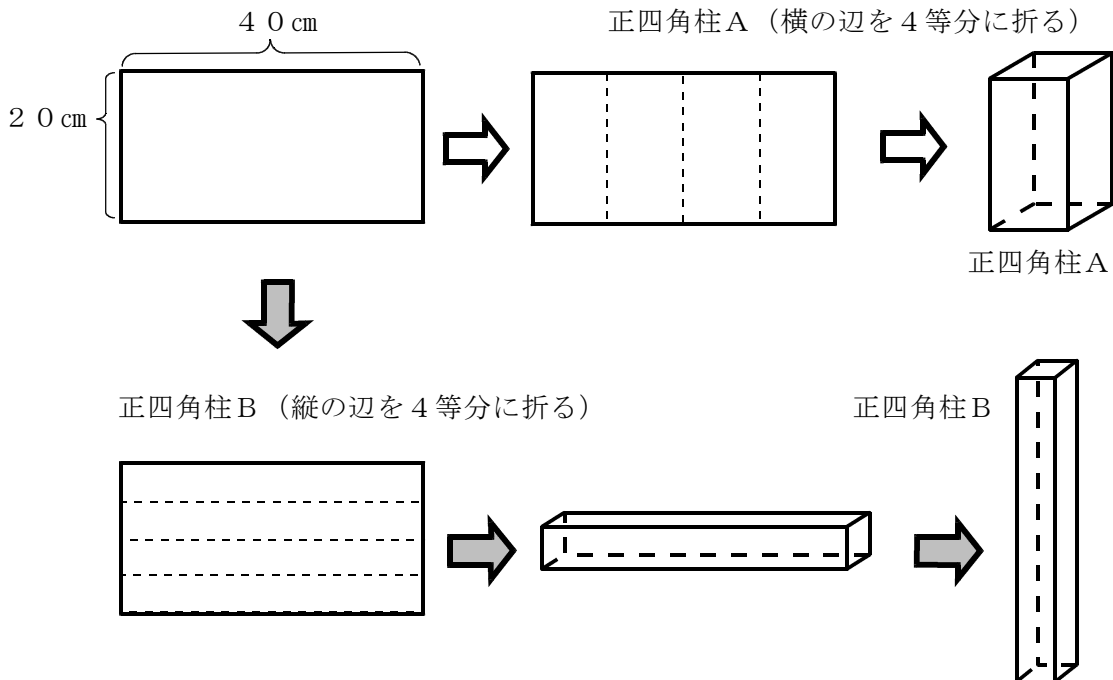


- ③ 横の辺を丸めて側面をつくる円柱Aの体積は、どのように変わっていきますか。
④ 縦の辺を丸めて側面をつくる円柱Bの体積は、どのように変わっていきますか。



縦折りと横折り，体積は変わるの？

横40 cm，縦20 cmの長方形の紙を，図のように4等分に折り，2通りの正四角柱A，Bの側面をつくります。



正四角柱Aと正四角柱Bの体積について，どちらが大きいかを，佐藤さん，鈴木さん，田中さんの三人が話し合っています。

底面が大きいから
Aが大きいかな。



佐藤さん

並べると高いので
Bが大きいようだ。



鈴木さん

同じ長方形でつくるので
結局同じでは…。



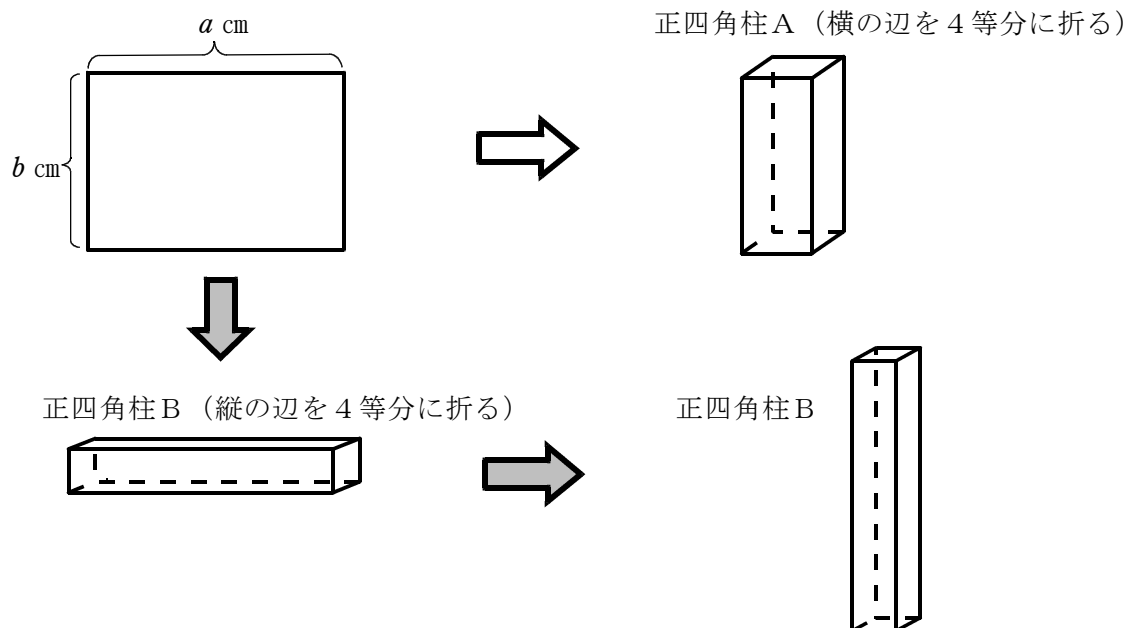
田中さん

次の問題に答えましょう。

(1) あなたは，どう考えますか。その理由もいみましょう。

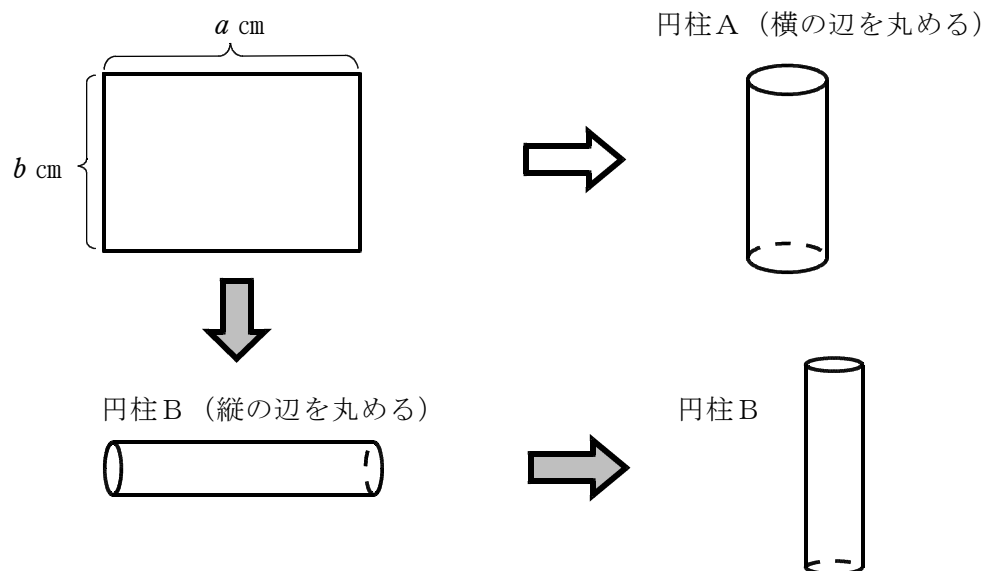
(自分の考え，理由)

- (2) 横が縦より長い横 a cm, 縦 b cm の長方形の紙を 4 等分に折り, 正四角柱 A と正四角柱 B の側面をつくったとき, 正四角柱 A と正四角柱 B の体積では, どちらが大きいですか。また, その理由を文字を使って説明しましょう。



大きい方 _____ , (理由)

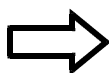
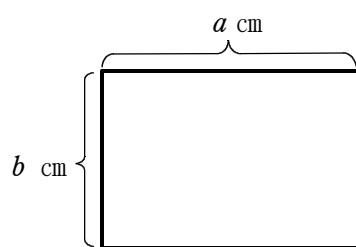
- (3) 長方形の紙で円柱の側面をつくる場合も, 正四角柱をつくる時と同じことがいえるか調べてみましょう。



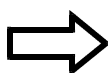
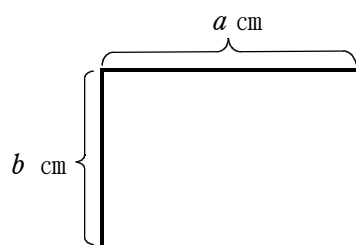
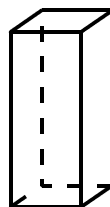
大きい方 _____ , (理由)

【発展1】

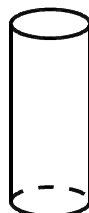
同じ長方形の紙を側面にして、正四角柱と円柱をつくります。どちらの体積が大きくなると思いますか。(2)や(3)で求めた結果を基に考えましょう。



正四角柱 (横の辺を4等分に折る)



円柱 (横の辺を丸める)

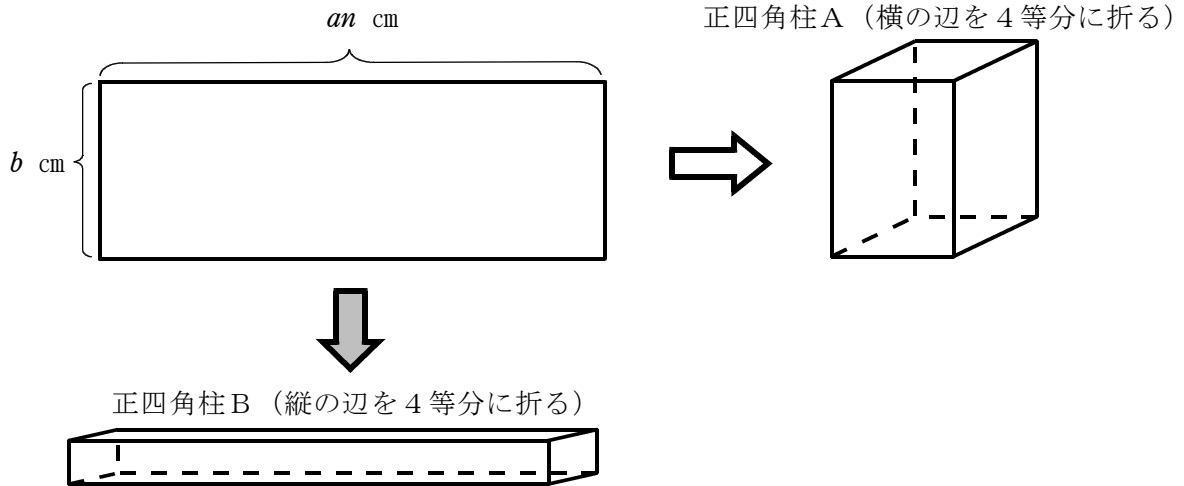


大きい方 _____ , (理由)

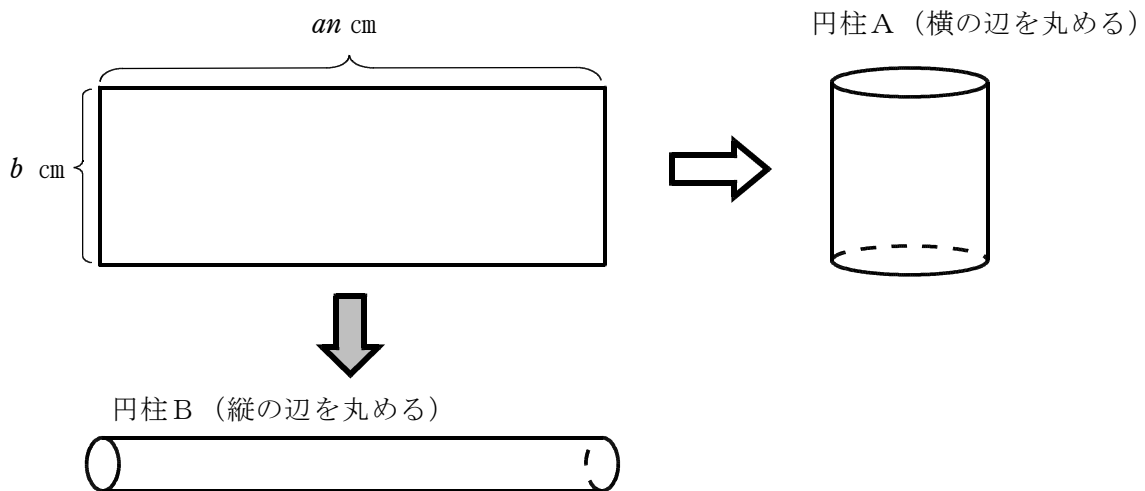
【発展2】

長方形の紙の横の長さを2倍, 3倍, ..., n 倍と変えていくとき, 次の問いに答えましょう。

- ① 横の辺を4等分に折って側面をつくる正四角柱Aの体積は, どのように変わっていきますか。
- ② 縦の辺を4等分に折って側面をつくる正四角柱Bの体積は, どのように変わっていきますか。



- ③ 横の辺を丸めて側面をつくる円柱Aの体積は, どのように変わっていきますか。
- ④ 縦の辺を丸めて側面をつくる円柱Bの体積は, どのように変わっていきますか。



解答 (1)

(自分の考え) Aの体積の方が大きい, 佐藤さんと同じだが, 理由は計算による等

(理由) Aの体積 = $(10 \times 10) \times 20 = 2000 \text{ cm}^3$

Bの体積 = $(5 \times 5) \times 40 = 1000 \text{ cm}^3$

解答 (2)

大きい方 A

(理由)

$$\text{Aの体積} = \left(\frac{a}{4} \times \frac{a}{4} \right) \times b = \frac{1}{16} a^2 b \text{ cm}^3$$

$$\text{Bの体積} = \left(\frac{b}{4} \times \frac{b}{4} \right) \times a = \frac{1}{16} ab^2 \text{ cm}^3$$

$$(1) \text{ A} \div \text{B} = \frac{1}{16} a^2 b \div \frac{1}{16} ab^2$$

$$= \frac{a}{b} > 1 \quad \therefore \text{Aの方が大きい}$$

$$\text{(別解) Aの体積 : Bの体積} = \frac{1}{16} a^2 b : \frac{1}{16} ab^2 = a : b$$

$a > b$ より Aの体積の方が大きい。

解答 (3)

大きい方 A

円柱Aの底面の半径 x は, $2\pi x = a$ より $x = \frac{a}{2\pi}$

$$\text{Aの体積} = \left(\frac{a}{2\pi} \times \frac{a}{2\pi} \times \pi \right) \times b = \frac{a^2 b}{4\pi} \text{ cm}^3$$

$$\text{同様にして B} = \frac{ab^2}{4\pi} \text{ cm}^3$$

$$A \text{の体積} \div B \text{の体積} = \frac{a^2 b}{4\pi} \div \frac{ab^2}{4\pi} = \frac{a}{b} > 1$$

∴ Aの体積の方が大きい。

$$\text{(別解)} \quad A \text{の体積} : B \text{の体積} = \frac{a^2 b}{4\pi} : \frac{ab^2}{4\pi} = a : b$$

$a > b$ より Aの体積の方が大きい。

解答 【発展1】

・長方形の横が a cm, 縦が b cm のとき,

$$\text{〔問題2〕より正四角柱の体積} = \frac{1}{16} a^2 b \text{ cm}^3$$

$$\text{〔問題3〕より円柱の体積} = \frac{1}{4\pi} a^2 b \text{ cm}^3$$

$$\pi \doteq 3.14 \text{ より} \quad \frac{1}{16} < \frac{1}{4\pi}$$

よって、円柱の体積の方が正四角柱の体積より大きい。

(別解) 正四角柱 \div 円柱 $= \frac{4\pi}{16} < 1$ より、円柱の体積の方が正四角柱の体積の体積より大きい。

解答 【発展2】

① 2^2 倍, 3^2 倍, \dots , n^2 倍と変わっていく。(2乗に比例して, 変わっていく)

理由 正四角柱Aの体積は

$$\left(\frac{an}{4} \times \frac{an}{4} \right) \times b = \frac{a^2 b}{16} \times n^2 \text{ cm}^3$$

$$\therefore n = 2 \text{ のとき, } \quad \times 2^2$$

$$n = 3 \text{ のとき, } \quad \times 3^2$$

$$n = 4 \text{ のとき, } \quad \times 4^2$$

② 2倍, 3倍, ..., b 倍と変わっていく (比例して変わっていく)。

理由: 横の長さが2倍, 3倍, ..., n 倍と変わるのに合わせて,
最初の正四角柱が2個, 3個, ..., n 個と増えていくから,
その体積は2倍, 3倍, ..., n 倍と変わる。

③ 2^2 倍, 3^2 倍, ..., n^2 倍と変わっていく (2乗に比例して, 変わっていく)。

理由 円柱Aの体積は

$$\left(\frac{an}{2\pi} \times \frac{an}{2\pi} \times \pi \right) \times b = \frac{a^2 b}{4\pi} \times n^2 \text{ cm}^3$$

$$\therefore n = 2 \text{ のとき, } \quad \times 2^2$$

$$n = 3 \text{ のとき, } \quad \times 3^2$$

$$n = 4 \text{ のとき, } \quad \times 4^2$$

④ 2倍, 3倍, ..., n 倍と変わっていく。 (比例して変わっていく)

理由: 横の長さが2倍, 3倍, ..., n 倍と変わるのに合わせて,
最初の円柱が2個, 3個, ..., n 個と増えていくから,
その体積は2倍, 3倍, ..., n 倍と変わる。